116

E.N.S.I. DE PHYSIQUE & DE MECANIQUE 1983

Programme P **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

DURÉE : 4 heures

On conviendra, dans tout le problème, d'identifier un polynôme à une indéterminée, à coefficients réels, et la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.

I

Soit (P_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite de polynômes de la variable x, définie par les relations :

$$P_0(x) = 2$$

$$P_1(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$16\,P_n(x) - 8(2x+1)\,P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

On notera P'_n la dérivée du polynôme P_n.

1. *a.* Expliciter P_2, P_3, P_4.

   b. Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré de ce polynôme.

   c. Établir une relation entre $P_n(x)$ et $P_n(-x-1)$, puis entre $P'_n(x)$ et $P'_n(-x-1)$; montrer que, si α est racine de P_n, il en est de même de $-1-\alpha$.

   d. Montrer qu'il existe une racine, que l'on déterminera, commune à tous les polynômes P_{2n+1} d'une part, P'_{2n} de l'autre.

.../...

2. On suppose dans cette question . $-1 \leqslant x \leqslant 0$; soit θ tel que : $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $x = -\cos^2\theta$. On pose :

$$f_n(\theta) = P_n(-\cos^2\theta) \qquad g_n(\theta) = P'_n(-\cos^2\theta)$$

a. Exprimer $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $f_2(\theta)$ en fonction de $\cos 4\theta$.

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe un réel λ_n, que l'on déterminera, tel que l'on ait, pour tout entier n :

$$f_n(\theta) = \lambda_n \cos 2n\theta .$$

c. Déterminer l'ensemble des racines du polynôme P_n, $n \geqslant 1$

d. On suppose : $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer, pour $n \geqslant 1$, $g_n(\theta)$ en fonction de $\frac{\sin 2n\theta}{\sin 2\theta}$; en déduire l'ensemble des racines du polynôme P'_n.

e. Calculer : $P_n(0)$, $P_n(-1)$, $P'_n(0)$, $P'_n(-1)$, $P_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

3. On suppose dans cette question : $x \leqslant -1$; soit φ tel que : $\varphi \geqslant 0$ et $x = -\operatorname{ch}^2\varphi$. On pose :

$$h_n(\varphi) = P_n(-\operatorname{ch}^2\varphi).$$

Exprimer $h_n(\varphi)$ en fonction de $\operatorname{ch} 2n\varphi$.

4. *a.* On note $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ les n racines du polynôme P_n ($n \geqslant 1$). Exprimer, dans le cas où x n'est pas une de ces racines, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - x_k}$ en fonction de $P_n(x)$ et $P'_n(x)$.

b. On suppose : $|x| > |x_k|$. Écrire le développement en série entière, par rapport à la variable $\frac{1}{x}$, de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{1 - \frac{x_k}{x}}$$

c. On suppose, dans cette question, $|x| > 1$ et on pose :

$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^p$. Écrire le développement en série entière, par rapport à la variable $\frac{1}{x}$, de la fonction : $x \longmapsto \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$.

II

1. Désignant toujours par x un réel quelconque, on considère le système de n équations linéaires, à n inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ($n \geqslant 3$) défini par :

$$\begin{cases} y_1 = x + \frac{1}{2} \\ -8(2x+1)y_1 + 16y_2 = -2 \\ y_1 - 8(2x+1)y_2 + 16y_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{k-2} - 8(2x+1)y_{k-1} + 16y_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-2} - 8(2x+1)y_{n-1} + 16y_n = 0 \end{cases}$$

a. Calculer le déterminant de ce système.

b. Déduire de ce qui précède l'expression de P_n , $n \geqslant 3$, sous forme d'un déterminant d'ordre n, puis les valeurs propres de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} -8 & 16 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -8 & 16 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 16 \; 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \quad \cdot & 0 \\ \cdot & & & 1 \quad -8 & 16 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \quad 1 & -8 \end{bmatrix}$$

2. On suppose, dans cette question : $x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.

a. Déterminer deux fonctions λ et μ, linéairement indépendantes, telles que, quels que soient les réels A et B, la suite de fonctions (z_h) , $h \in \mathbb{N}$,définies par :

$$z_h(x) = A[\lambda(x)]^h + B[\mu(x)]^h$$

vérifie :

$$z_{h-2}(x) - 8(2x+1)\, z_{h-1}(x) + 16 z_h(x) = 0 \qquad (h \geqslant 2).$$

b. Montrer qu'il existe un couple (A, B) tel que :

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad P_h(x) = A[\lambda(x)]^h + B[\mu(x)]^h.$$

3. On sait que l'ensemble E des polynômes réels de degré au plus égal à n et du polynôme nul est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$; on convient de noter $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ sa base canonique.

Vérifier que l'application f qui à tout élément P de E associe Q défini par :

$$Q(x) = 2x(x+1)\frac{d^2P}{dx^2} + (2x+1)\frac{dP}{dx}$$

est un endomorphisme de E dont on écrira la matrice relativement à la base ci-dessus. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de cet endomorphisme.

4. *a.* Exprimer $\cos^{2n}\theta$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, en fonction de $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, ... , $\cos 2n\theta$.

b. Démontrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E, puis déterminer, en utilisant les résultats de 4 *a*, les coordonnées de x^n relativement à cette base.

5. On considère l'ensemble E' des polynômes R de E qui vérifient :

$$R(x) = (-1)^n R(-x-1).$$

Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E ; en déterminer la dimension et une base.

FIN